

# FUNCIONES



a)  $f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$

1)  $x-1=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$   
 $x=1$

2) Pto de corte:

$\frac{3x+6}{x-1} = 0 \Rightarrow 3x+6=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2, 0)$

q.e.x:  $y=0$

$y = \frac{3 \cdot 0 + 6}{0 - 1} = -6 \Rightarrow (0, -6)$

3) Simetría:

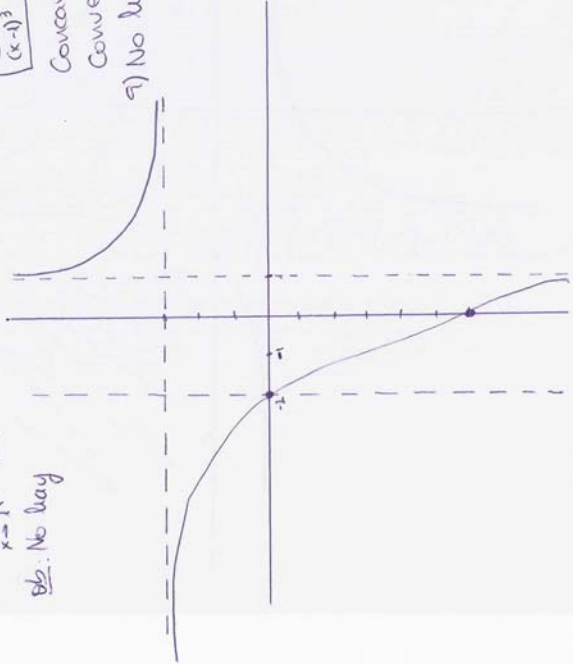
$f(-x) = \frac{3(-x)+6}{-x-1} \Rightarrow \text{NO es simétrica}$

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+6}{x-1} = 3 \Rightarrow |y=3|$   
 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+6}{x-1} = 3$

V:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+6}{x-1} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+6}{x-1} = +\infty \Rightarrow |x=1|$

Ob: No hay



5) Regionamiento:

$3x+6$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
$\frac{3x+6}{x-1}$	+	-	+

6)  $f'(x) = \frac{3(x-1) - (3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{-9}{(x-1)^2}$

$-9$	-	-	-
$(x-1)^2$	+	+	+
$\frac{-9}{(x-1)^2}$	-	-	-

Deriva:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

7) No hay max. ni min

8)  $f''(x) = \frac{9 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{18}{(x-1)^3}$

$18$	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	+
$\frac{18}{(x-1)^3}$	-	+	+

Concava:  $(-\infty, 1)$

Convexa:  $(1, +\infty)$

9) No hay puntos de inflexión

b)  $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$

1)  $x-2=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$   
 $x=2$

2) Pto de corte:

q.e.x:  $y=0$

$\frac{3-x}{x-2} = 0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3, 0)$

q.e.y:  $x=0$

$y = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow (0, -\frac{3}{2})$

3) Simetría:

$f(-x) = \frac{3-(-x)}{-x-2} = \frac{3+x}{-x-2} \Rightarrow \text{NO es simétrica}$

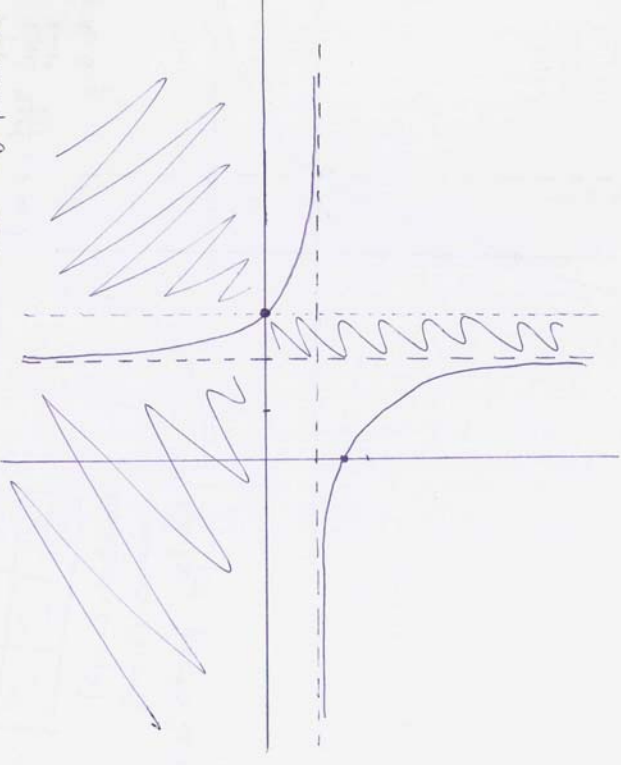
4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x-2} = -1 \Rightarrow |y=-1|$   
 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x-2} = -1$

V:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{x-2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{x-2} = +\infty \Rightarrow |x=2|$

Ob: No hay



5) Regionamiento:

$3-x$	+	+	+
$x-2$	-	+	+
$\frac{3-x}{x-2}$	-	+	-

6)  $f'(x) = \frac{-(x-2) - (3-x)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$-1$	-	-	-
$(x-2)^2$	+	+	+
$\frac{-1}{(x-2)^2}$	-	-	-

Deriva:  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

7) No hay max. ni min

8)  $f''(x) = \frac{-2}{(x-2)^3}$

$-2$	-	-	-
$(x-2)^3$	-	+	+
$\frac{-2}{(x-2)^3}$	+	-	-

Concava:  $(2, +\infty)$

Convexa:  $(-\infty, 2)$

9) No hay puntos de inflexión

c)  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

1)  $x+2=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) Pos de corte:

eje x:  $y=0$   
 $\frac{x+1}{x+2} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

eje y:  $x=0$   
 $y = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

3) Simetría:

$f(-x) = \frac{-x+1}{-x+2} \Rightarrow$  No es simétrica

4) Asintotas:

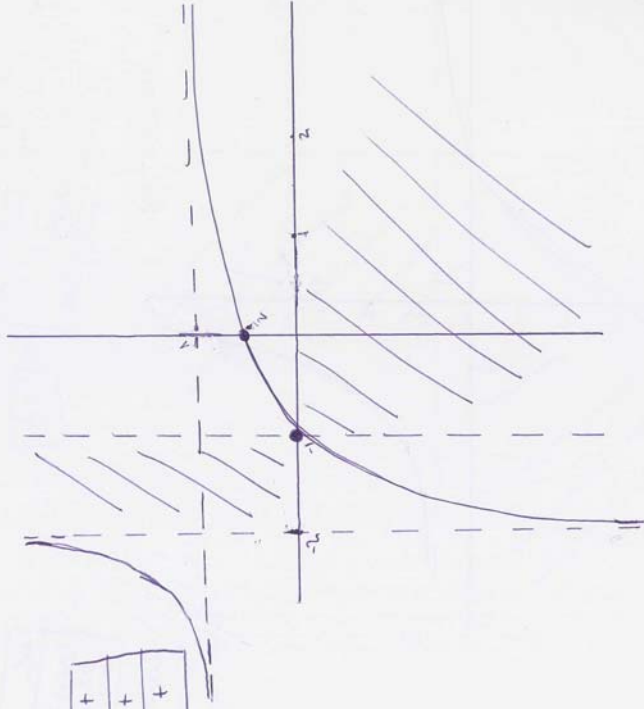
H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$   
 $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 \Rightarrow y=1$

V:  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x+2} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x+2} = -\infty \Rightarrow x=-2$

Ob: No hay asínt. oblicuas

5) Regionamiento

$x+1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$\frac{x+1}{x+2}$	+	-	+



3

d)  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

1)  $3x-1=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$

2) Pos de corte:

eje x:  $y=0$   
 $\frac{2x+3}{3x-1} = 0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow (-\frac{3}{2}, 0)$

eje y:  $x=0$   
 $y = \frac{0+3}{0-1} = -3 \Rightarrow (0, -3)$

3) Simetría:

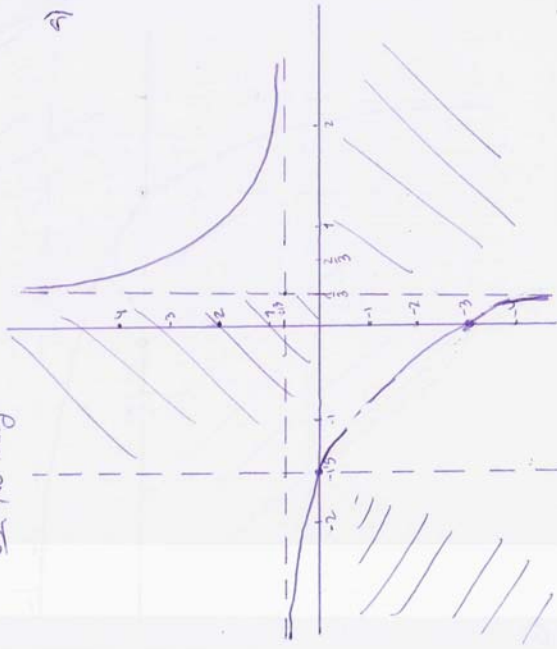
$f(-x) = \frac{2(-x)+3}{3(-x)-1} = \frac{-2x+3}{-3x-1} \Rightarrow$  No es simétrica

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

V:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{2x+3}{3x-1} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{2x+3}{3x-1} = +\infty \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Ob: No hay



4

5) Regionamiento

$2x+3$	-	+	+
$3x-1$	-	-	+
$\frac{2x+3}{3x-1}$	+	-	+

6)  $f'(x) = \frac{2(3x-1) - 3(2x+3)}{(3x-1)^2} = \frac{-11}{(3x-1)^2}$

-11	-	-	-
$(3x-1)^2$	+	+	+
$\frac{-11}{(3x-1)^2}$	-	-	-

Deriva:  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

7) No hay max ni min

8)  $f''(x) = \frac{11 \cdot 2(3x-1) \cdot 3}{(3x-1)^4} = \frac{66}{(3x-1)^3}$

66	+	+	+
$\frac{66}{(3x-1)^3}$	-	+	+
$\frac{66}{(3x-1)^3}$	-	+	+

Concava:  $(-\infty, \frac{1}{3})$

Convexa:  $(\frac{1}{3}, +\infty)$

9) No hay pts de inflexión



e)  $f(x) = \frac{4x-1}{2x-2}$

1)  $2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Ptos de corte:

$\text{ejes: } y=0 \Rightarrow \frac{4x-1}{2x-2} = 0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$

$\text{ejes: } x=0 \Rightarrow \frac{4x-1}{2x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

3) Simetría:

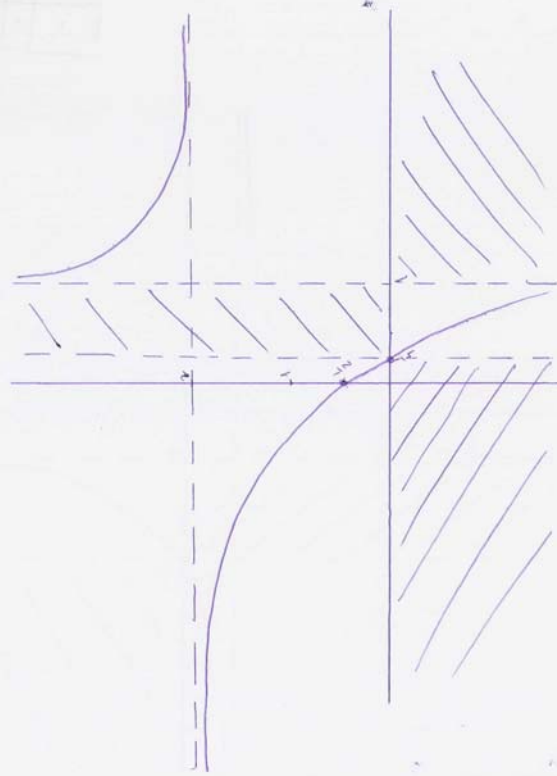
$f(-x) = \frac{4(-x)-1}{2(-x)-2} = \frac{-4x-1}{-2x-2} \rightarrow \text{No es simétrica}$

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{2x-2} = 2 \Rightarrow y=2$   
 $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{2x-2} = 2$

V:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-1}{2x-2} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-1}{2x-2} = +\infty \Rightarrow x=1$

Ob: No hay



5) Regiones de corte:

$4x-1$	-	+	+
$2x-2$	-	-	+
$4x-1$	+	-	+
$2x-2$			

6)  $f'(x) = \frac{4(2x-2) - 2(4x-1)}{(2x-2)^2} = \frac{-6}{(2x-2)^2}$

-6	-	-	-
$(2x-2)^2$	+	+	+
-6	-	-	-
$(2x-2)^2$			

Deriva:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

7) No hay max ni min

8)  $f''(x) = \frac{+6 \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{24}{(2x-2)^4}$

24	+	+	+
$(2x-2)^4$	-	+	+
24	-	+	+
$(2x-2)^4$			

Concava:  $(-\infty, 1)$

Convexa:  $(1, +\infty)$

a) No hay puntos de inflexión

f)  $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$

1)  $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Pto de corte:

$\text{ejes: } y=0 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = 0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3, 0)$

$\text{ejes: } x=0 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow (0, -3)$

3) Simetría:

$f(-x) = \frac{3-(-x)}{-x-1} = \frac{3+x}{-x-1} \rightarrow \text{NO es simétrica}$

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x-1} = -1 \Rightarrow y=-1$   
 $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{x-1} = -1$

V:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x}{x-1} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3-x}{x-1} = +\infty \Rightarrow x=1$

Ob: No hay asínt. oblicuas

5) Regiones de corte:

$3-x$	+	+	-
$x-1$	-	+	+
$3-x$	-	+	-
$x-1$			

6)  $f'(x) = \frac{-(x-1) - (3-x)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

-2	-	-	-
$(x-1)^2$	+	+	+
-2	-	-	-
$(x-1)^2$			

Deriva:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

7) No hay max ni min

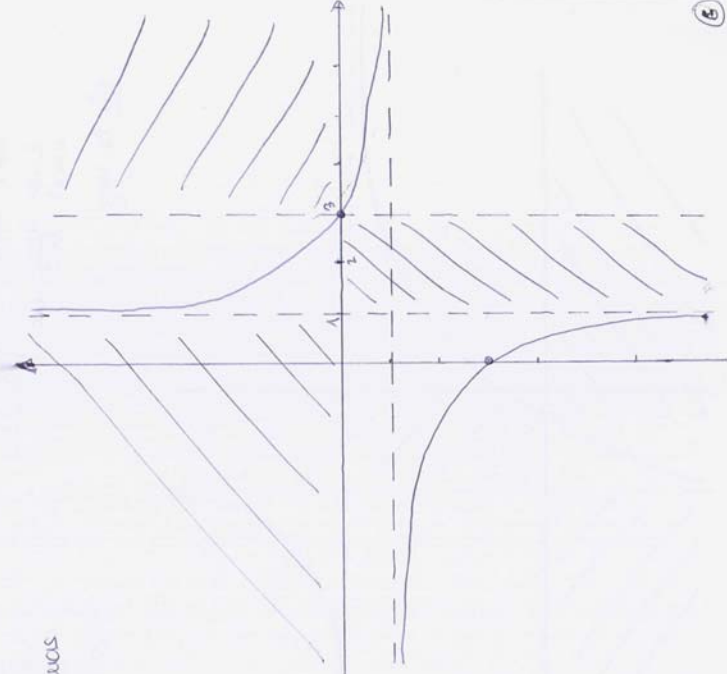
8)  $f''(x) = \frac{+2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$

4	+	+	+
$(x-1)^3$	-	+	+
4	-	+	+
$(x-1)^3$			

Concava:  $(-\infty, 1)$

Convexa:  $(1, +\infty)$

a) No hay puntos de inflexión



g)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

1)  $x^2-1=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$   
 $x = \pm 1$

2) Ptos de corte:

ej:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\frac{x+1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x+1=0$  No corta al eje x  
 $x = -1$  porque -1 no está en el dominio

ej:  $y = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x = -1$

3) Simetría:  
 $f(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2-1} = \frac{-x+1}{x^2-1} \Rightarrow$  No es simetría

4) Asíntotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y=0$   
 $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$

V:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = 0$

Ob: No hay

5) Regioanamiento

$x+1$	-	+	+
$x^2-1$	+	-	+
$\frac{x+1}{x^2-1}$	-	-	+

6)  $f(x) = \frac{x^2-1-(x+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$   
 $= \frac{-(x+1)(x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

-1	-	-	-
$(x-1)^2$	+	+	+
$\frac{-1}{(x-1)^2}$	-	-	-

Deriva:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

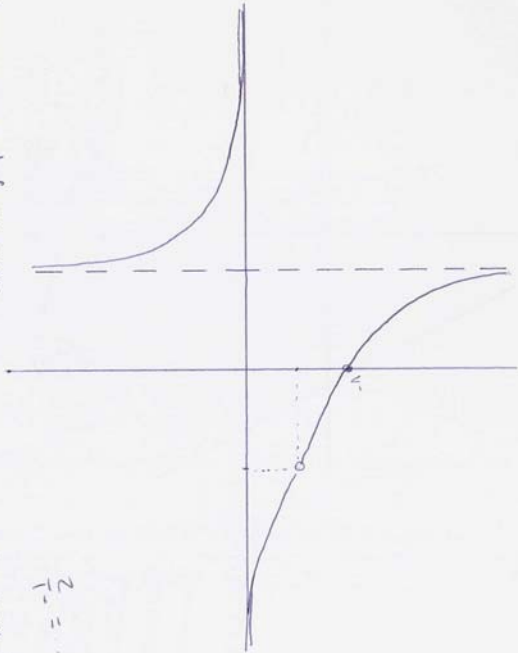
7) No hay max. ni min.

8)  $f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$

2	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	+
$\frac{2}{(x-1)^3}$	+	+	+

Concavo:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$   
 Convexo:  $(1, +\infty)$

9) No hay puntos de inflexión



h)  $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+3}$

1)  $x+3=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$   
 $x = -3$

2) Ptos de corte:

ej:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$   
 $\frac{2x^2-1}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x^2-1=0$   
 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

ej:  $y = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-1}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x^2-1=0$   
 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Simetría:

$f(-x) = \frac{2(-x)^2-1}{-x+3} = \frac{2x^2-1}{-x+3} \Rightarrow$  No es simetría

4) Asíntotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-1}{x+3} = +\infty$  No hay  
 $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-1}{x+3} = +\infty$

V:  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2-1}{x+3} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2-1}{x+3} = +\infty$   
 $\Rightarrow x = -3$

Ob:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3x} = 2$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x^2-1}{x+3} - 2x \right) = -6$   
 $\Rightarrow y = 2x - 6$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$   
 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

5) Regioanamiento

$2x^2-1$	+	+	-	+
$x+3$	-	+	+	+
$\frac{2x^2-1}{x+3}$	-	+	-	+

6)  $f'(x) = \frac{4x(x+3) - (2x^2-1)(x+3)^{-2}}{(x+3)^2} = \frac{4x^2+12x-2x^2+1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+1}{(x+3)^2}$   
 $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-2}}{4} = \frac{-12 \pm 11.97}{4} \Rightarrow x = -5.99, -0.1$

$2x^2+12x+1$	+	-	-	+
$(x+3)^2$	+	+	+	+
$\frac{2x^2+12x+1}{(x+3)^2}$	+	-	-	+

Grava:  $(-\infty, -5.99) \cup (-0.1, +\infty)$

Deriva:  $(-5.99, -3) \cup (-3, -0.1)$

7)  $f''(x) = \frac{(4x+12)(x+3)^2 - (2x^2+12x+1)2(x+3)}{(x+3)^4}$   
 $= \frac{-24x+34}{(x+3)^3}$

$f''(-0.1) > 0 \Rightarrow$  mínimo:  $(-0.1, -0.34)$

$f''(-5.99) < 0 \Rightarrow$  máximo:  $(-5.99, -2.367)$

8)  $-24x+34=0 \Rightarrow x = 1.4$

$-24x+34$	+	+	+	+
$(x+3)^3$	-	+	+	+
$\frac{-24x+34}{(x+3)^3}$	+	-	-	+

Concavo:  $(-\infty, -3) \cup (1.4, +\infty)$   
 Convexo:  $(-3, 1.4)$

9) P.I.  $(1.4, 0.64)$



c)  $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-4}$

1)  $2x-4=0 \Rightarrow x=2$   
 $\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Ptos de corte:

q.e.x:  $y=0$  No corta a

$\frac{x^2+1}{2x-4} = 0 \Rightarrow x^2+1=0$   
 No tiene solución

q.e.y:  $x=0$   
 $y = \frac{0^2+1}{2 \cdot 0 - 4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (0, -\frac{1}{4})$

3) Simetría:

$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{2(-x)-4} = \frac{x^2+1}{-2x-4} \neq f(x) \neq -f(x)$   
 $\Rightarrow$  NO es simétrica

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x-4} = +\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

$y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{2x-4} = -\frac{1}{4}$

V:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{2x-4} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{2x-4} = +\infty$   
 $\Rightarrow x=2$

H:  $y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{2x-4} = \frac{5}{0} = \infty$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{2x-4} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x-4} = 1$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

5) Regioamiento

$x^2+1$	+	+	+
$2x-4$	-	+	+
$\frac{x^2+1}{2x-4}$	-	-	+

6)  $f(x) = \frac{2x(2x-4) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-2}{(2x-4)^2}$

$2x^2-8x-2=0$   
 $x = \frac{8 \pm \sqrt{64+8}}{4} = \frac{4 \pm 4}{2}$   
 $\Rightarrow x = 0, 4$

$2x^2-8x-2$	+	-	+
$(2x-4)^2$	+	+	+
$\frac{2x^2-8x-2}{(2x-4)^2}$	+	-	+

Queda:  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Queda:  $(0, 4)$

7)  $f'(x) = \frac{(4x-8)(2x-4)^2 - (2x^2-8x-2) \cdot 2(2x-4)}{(2x-4)^4}$

$= \frac{40}{(2x-4)^3}$

$f''(-0.12) < 0 \Rightarrow$  máximo  $(-0.12, -0.24)$

$f''(4.1) > 0 \Rightarrow$  mínimo  $(4.1, 4.124)$

8)

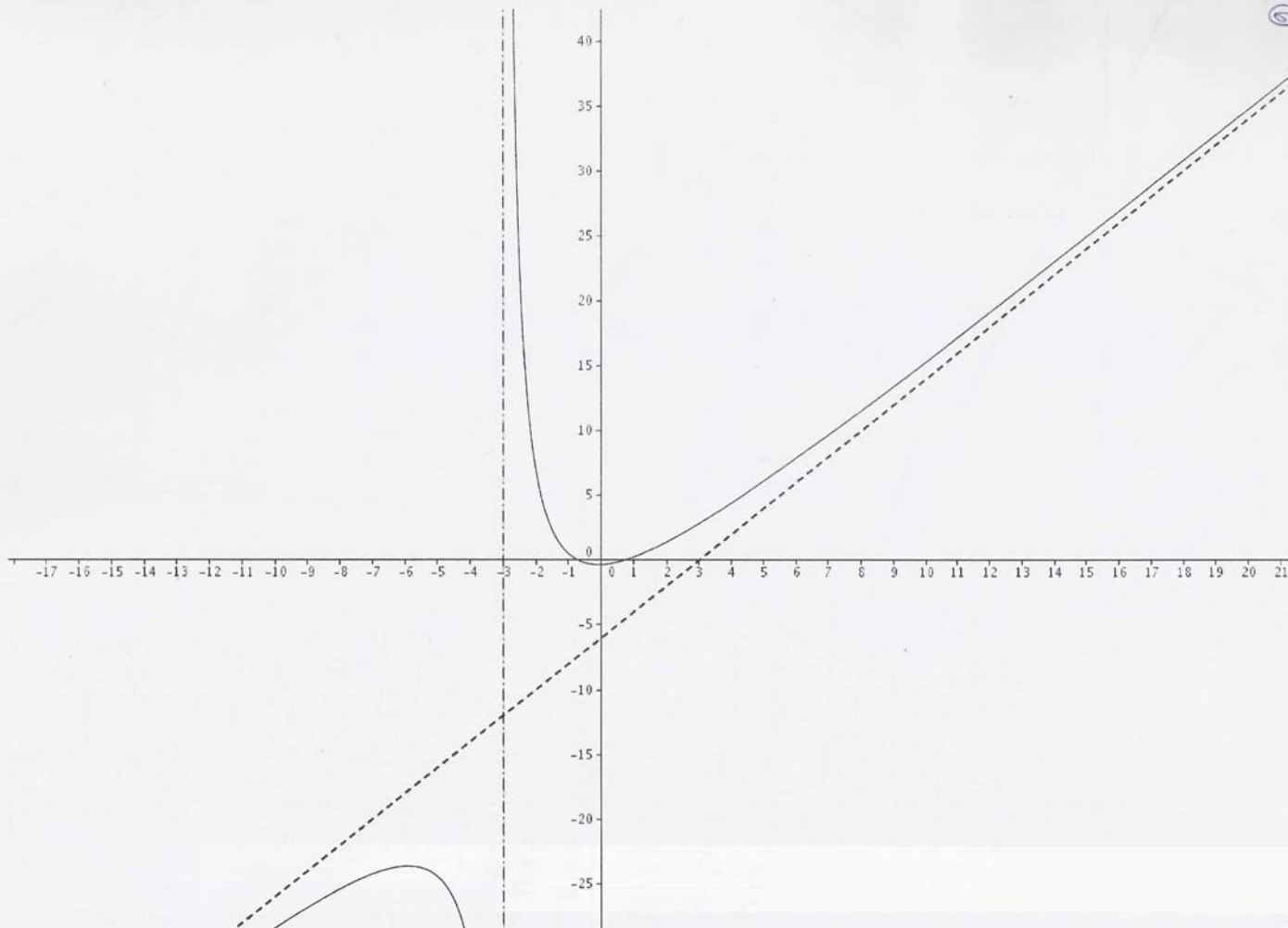
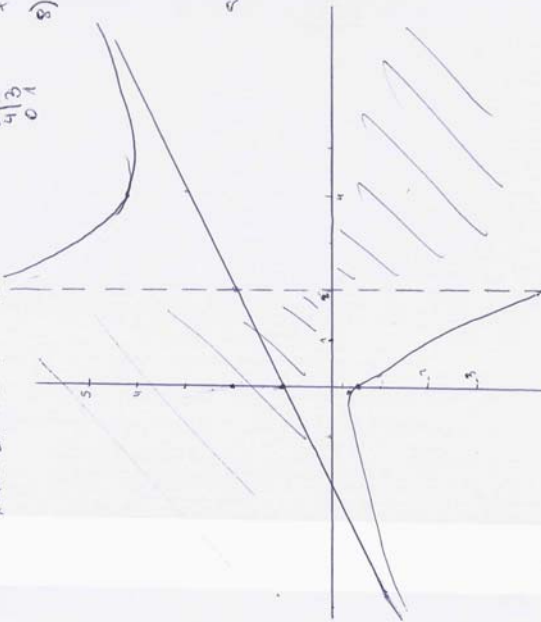
$40$	+	+	+
$(2x-4)^3$	-	+	+
$\frac{40}{(2x-4)^3}$	-	-	+

Concava:

$(-\infty, 2)$

$(2, +\infty)$

$\Rightarrow$  No hay ptos de inflexión



2)  $f(x) = \frac{3-x}{2-x}$

1)  $2-x=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Pontos de corte:

Se  $y=0$ :  $\frac{3-x}{2-x} = 0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,0)$

Se  $x=0$ :  $y = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \Rightarrow (0, \frac{3}{2})$

3) Simetria:

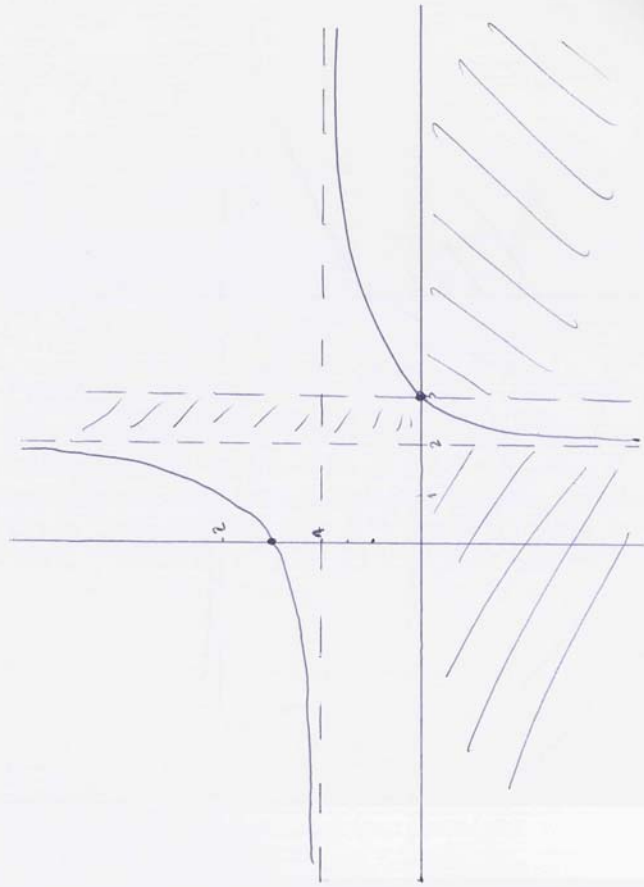
$f(-x) = \frac{3-(-x)}{2-(-x)} = \frac{3+x}{2+x} \neq f(x)$  NO é simétrica

4) Assintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{2-x} = 1 \Rightarrow y=1$   
 $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{2-x} = 1$

V:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{2-x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{2-x} = -\infty \Rightarrow x=2$

Ob: No hay



5) Regionamiento

$2-x$	+	+	-
$2-x$	+	-	-
$3-x$	+	-	+
$2-x$	+	-	+

6)  $f'(x) = \frac{-(2-x) + (3-x)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}$

$1$	+	+	+
$(2-x)^2$	+	+	+
$\frac{1}{(2-x)^2}$	+	+	+

Area:  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

7) No hay max ni min.

8)  $f''(x) = \frac{2}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3}$

$2$	+	+	+
$(2-x)^3$	+	-	-
$\frac{2}{(2-x)^3}$	+	-	-

Concavo:  $(2, +\infty)$

Convexo:  $(-\infty, 2)$

9) No hay ptos de inflexión

4)  $f(x) = \frac{4x-1}{2x-2}$

1)  $2x-2=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Ptos de corte:

Se  $y=0$ :  $\frac{4x-1}{2x-2} = 0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$

Se  $x=0$ :  $y = \frac{4 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0 - 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

3) Simetria:

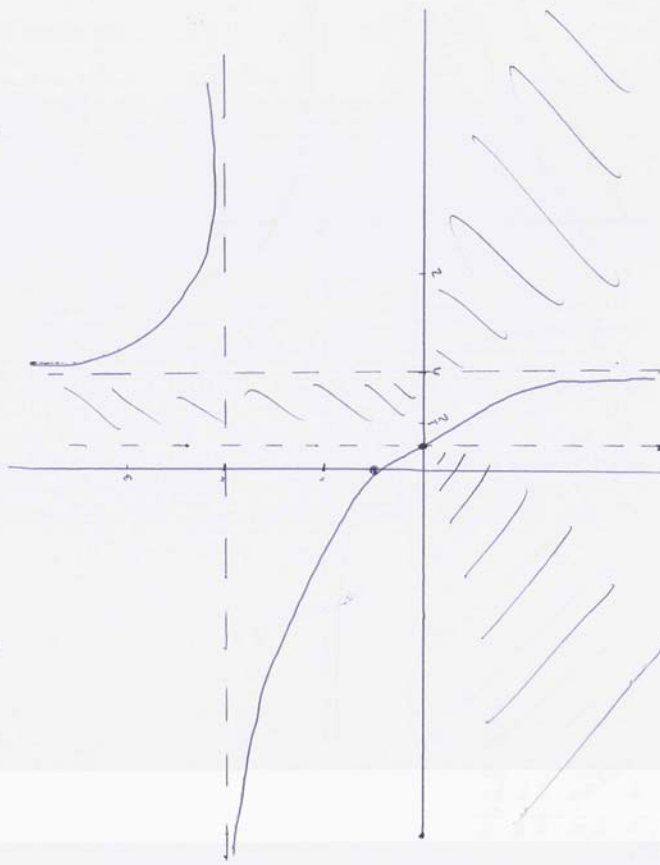
$f(-x) = \frac{4(-x)-1}{2(-x)-2} = \frac{-4x-1}{-2x-2} = \frac{4x+1}{2x+2} \neq f(x)$  NO es simétrica

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{2x-2} = 2 \Rightarrow y=2$   
 $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{2x-2} = 2$

V:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-1}{2x-2} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-1}{2x-2} = +\infty \Rightarrow x=1$

Ob: No hay







1)  $f(x) = x^3 - 6x^2$

2) Derivada  $f' = 0$

3) Puntos de corte:

4) Ejes:  $y = 0$   
 $x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 6) = 0$   
 $x = 0 \Rightarrow (0,0)$   
 $x = 6 \Rightarrow (6,0)$

5) Ejes:  $x = 0$   
 $y = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

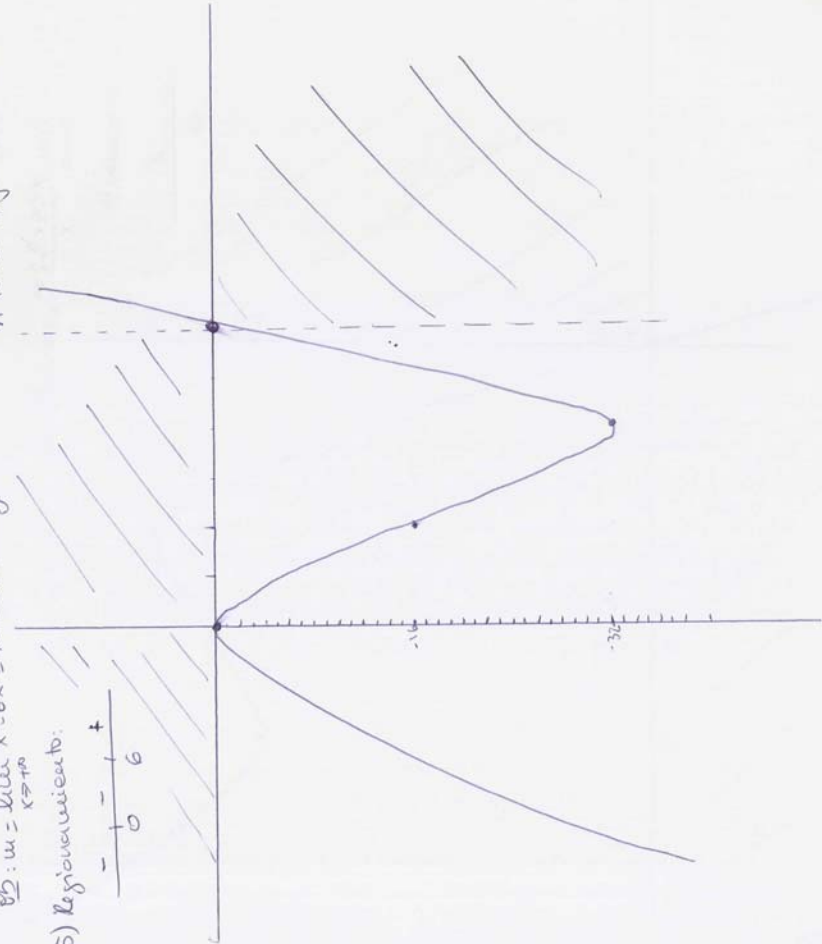
6) Signatura:  
 $f''(x) = (x^3 - 6x^2)' = -x^3 - 6x^2 \Rightarrow$  No es simétrica.

7) Asintotas:  
 $H: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 6x^2 = +\infty$   
 $V: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 6x^2 = -\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

8)  $V: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 6x^2 = +\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

9) Regionamiento:

10)  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay



1)  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

2) Derivada  $f' = 0$

3) Puntos de corte:

4) Ejes:  $y = 0$   
 $x^3 - 9x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9x + 24) = 0$   
 $x = 0 \Rightarrow (0,0)$   
 $x = 3 \Rightarrow (3, 18)$   
 $x = 6 \Rightarrow (6, 0)$

5) Ejes:  $x = 0$   
 $y = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$

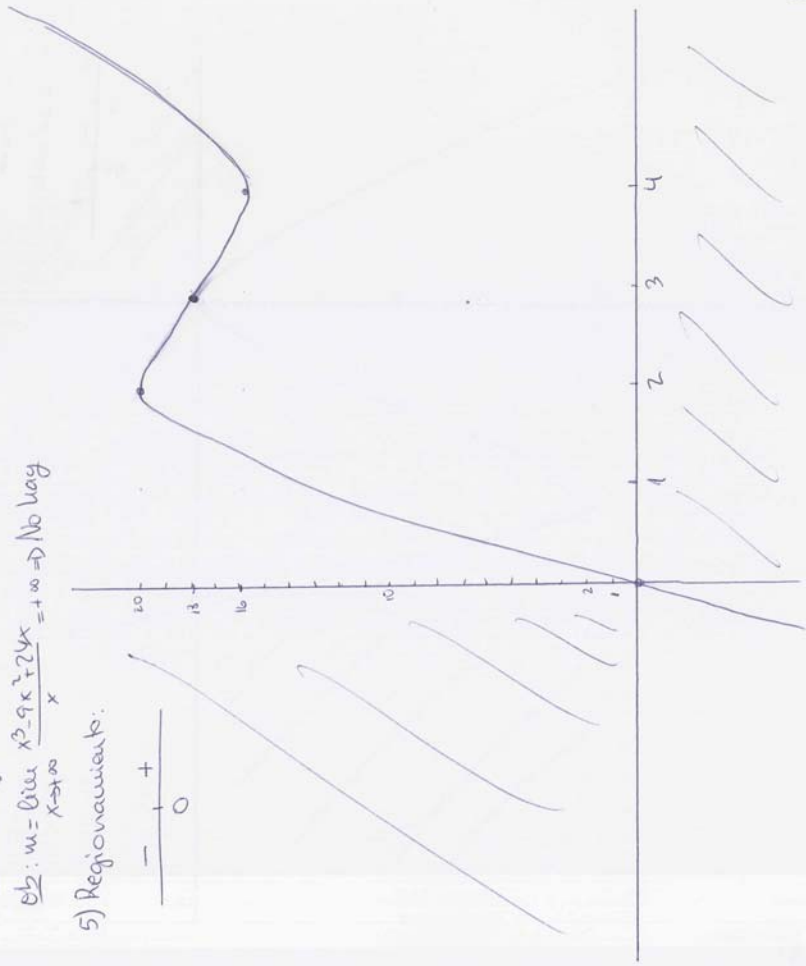
6) Signatura:  
 $f''(x) = (x^3 - 9x^2 + 24x)' = 3x^2 - 18x + 24$   
 $\Rightarrow$  No es simétrica

7) Asintotas:  
 $H: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 9x^2 + 24x = +\infty$   
 $V: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 9x^2 + 24x = -\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

8)  $V: y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 9x^2 + 24x = +\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

9) Regionamiento:

10)  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 9x^2 + 24x}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay





1)  $f(x) = x^3 + 3x^2$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Ptos de corte con los ejes:

Ejes:  $y = 0$   
 $x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$   
 $x = -3 \Rightarrow (-3,0)$

Ejes:  $x = 0$   
 $y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) Simetría:  
 $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2 \neq x^3 + 3x^2 \Rightarrow$  NO es simétrica

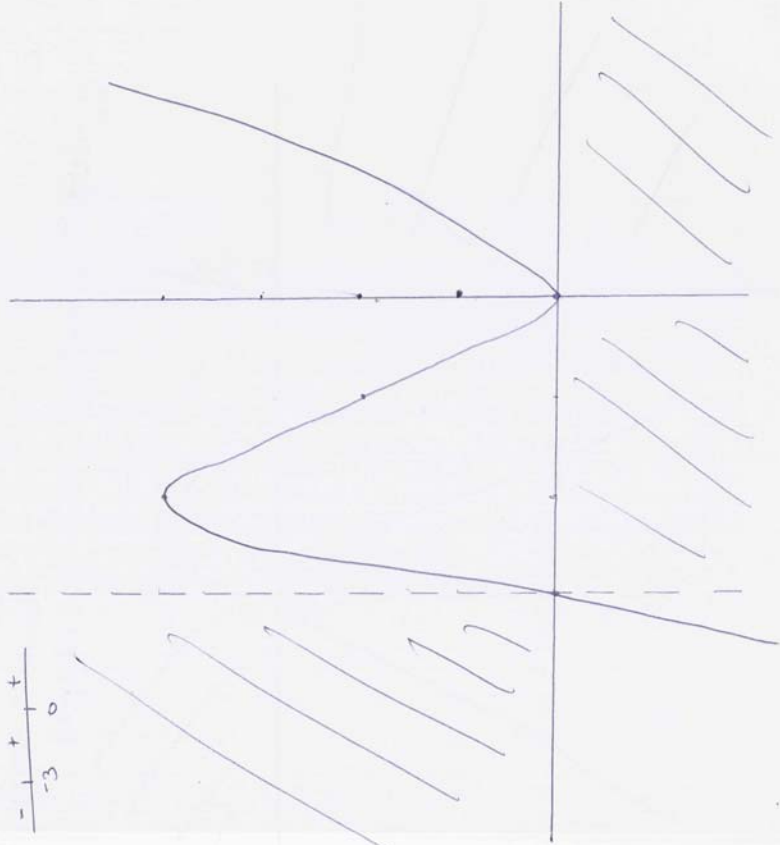
4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^3} = +\infty$  No hay  
 $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^3} = -\infty$  No hay

V: No hay  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay

5) Regiones:

$-1 \quad + \quad - \quad +$   
 $-3 \quad 0$



6)  $f(x) = 3x^2 + 6x$   
 $3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $x = -2$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

Dom  $f = \mathbb{R}$

1)  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Ptos de corte con los ejes:

Ejes:  $y = 0$   
 $-x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$   
 $x = 3 \Rightarrow (3,0)$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

Ejes:  $x = 0$

$y = -0^3 + 6 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) Simetría:

$f(-x) = -(-x)^3 + 6(-x)^2 - 9(-x) = x^3 + 6x^2 + 9x \neq -x^3 + 6x^2 - 9x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  NO es simétrica

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{x^3} = -\infty$   
 $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{x^3} = -\infty$

V: No hay

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{x} = \pm\infty \Rightarrow$  No hay



8)  $f(x) = -x^3 + 3x$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Puntos de corte:

$\text{ejes: } y=0$   
 $-x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$   
 $\Rightarrow (0,0), (\sqrt{3},0), (-\sqrt{3},0)$

$\text{ejes: } x=0$   
 $y = -0^3 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) Signatura

$f'(x) = -(-x^3) + 3(-x) = x^3 - 3x \Rightarrow$  Signat. respecto  
 origenes

4) Asintotas:

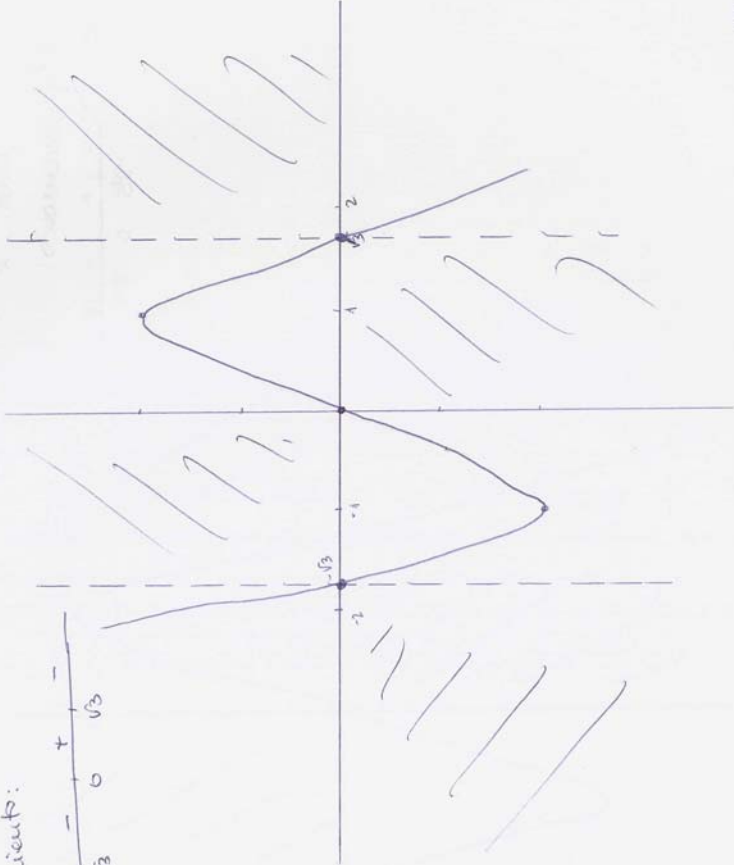
$\text{H: } y = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x = -\infty$   
 $\text{V: } y = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x = +\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

V: No hay

$\text{ob: } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x}{x} = -\infty \Rightarrow$  No hay

5) Regiones vacías:

$$\begin{array}{c} + \\ - \sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \end{array}$$



6)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Puntos de corte:

$\text{ejes: } y=0$   
 $\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(\frac{1}{3}x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $\Rightarrow (0,0), (\sqrt{12},0), (-\sqrt{12},0)$

$\text{ejes: } x=0$   
 $y = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) Signatura:

$f'(x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{x^3}{3} + 4x \Rightarrow$  Signat.  
 respecto  
 origenes

4) Asintotas:

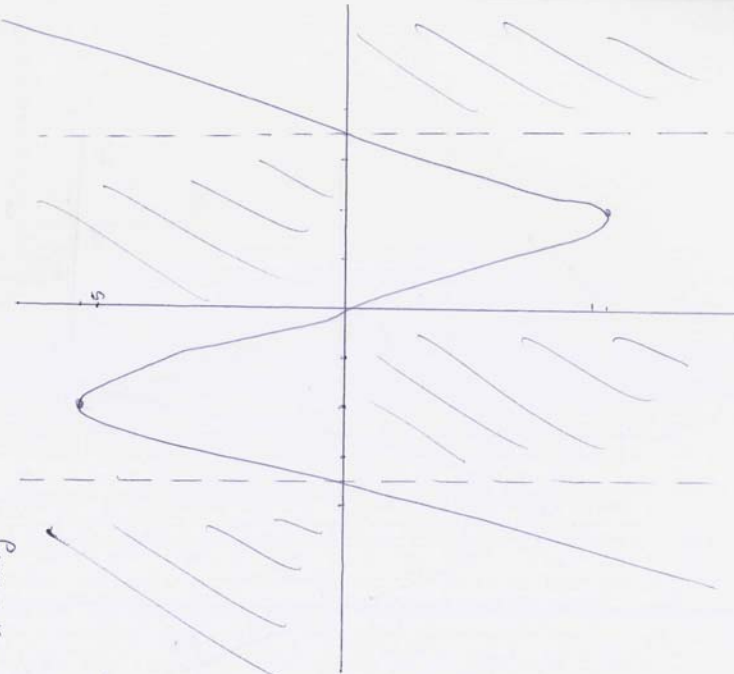
$\text{H: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 - 4x = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 - 4x = -\infty$   
 $\Rightarrow$  No hay

V: No hay

$\text{ob: } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3 - 4x}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay

5) Regiones vacías:

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ + \end{array}$$





w)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Pts de corte:

es:  $y = 0$

$x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow (0,0) (\frac{3}{2}, 0)$

es:  $x = 0 \Rightarrow (0,0)$

$y = 0$

3) Simetria

$f(-x) = (-x)^3 - \frac{3}{2}(-x)^2 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow$  NO es simétrica

4) Asintotas:

H:  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - \frac{3}{2}x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - \frac{3}{2}x^2 = -\infty \Rightarrow$  No hay

V: No hay

eb:  $w = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay

5) Regiones:

$\frac{-}{0} \frac{3}{2} \frac{+}{+}$

6)  $f'(x) = 3x^2 - 3x$   
 $\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{-}$   
0 1

(Dec:  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ )

Decrec:  $(0, 1)$

7)  $f''(x) = 6x - 3$

$f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow \max(0, f(0)) = (0, 0)$

$f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \min(1, f(1)) = (1, -\frac{3}{2})$

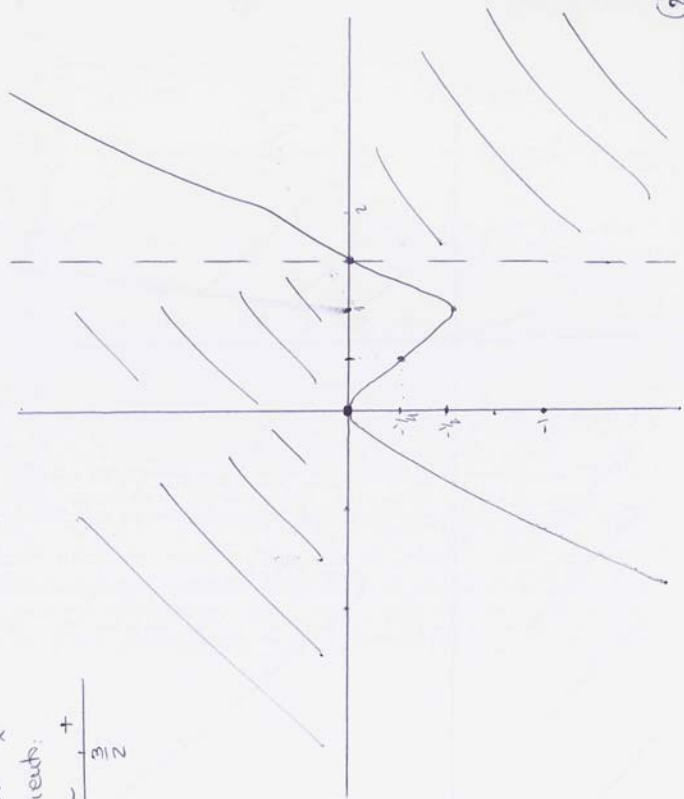
8)  $f'(x) = 6x - 3$

$\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{-}$   
0 1

Concavo:  $(-\infty, \frac{1}{2})$

Convexo:  $(\frac{1}{2}, +\infty)$

7) I  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$



x)  $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$

1) Dom  $f = \mathbb{R}$

2) Pts de Corte:

es:  $y = 0$

$8x^3 - 84x^2 + 240x = 0$

$4x(2x^2 - 21x + 60) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 60 = 0$

$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 480}}{4} \Rightarrow (0, 0)$

es:  $x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$y = 0$

3) Simetria

$f(-x) = 8(-x)^3 - 84(-x)^2 + 240(-x) =$

$= -8x^3 - 84x^2 - 240x \Rightarrow$  NO es simétrica

4) Asintotas:

H:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 8x^3 - 84x^2 + 240x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 8x^3 - 84x^2 + 240x = -\infty \Rightarrow$  No hay

V: No hay

eb:  $w = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 - 84x^2 + 240x}{x} = +\infty \Rightarrow$  No hay



5) Regiones:

$\frac{-}{+} \frac{+}{-}$   
0

6)  $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0$

$\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{-}$   
2 5

$\frac{24x^2 - 168x + 240 = 0}{24(x^2 - 7x + 10) = 0}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \Rightarrow (2, 5)$

Decrec:  $(2, 5)$

7)  $f''(x) = 48x - 168$

$f''(2) = -72 < 0 \Rightarrow \max(2, f(2)) = (2, 208)$

$f''(5) = 72 > 0 \Rightarrow \min(5, f(5)) = (5, 100)$

8)  $f''(x) = 48x - 168 = 0$

$\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{-}$   
3 5

9) P I  $(3, 5, f(3)) = (3, 154)$

2  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Ambas gráficas son hipérbolas. Cálculo sus asíntotas:

$\frac{1}{x}$  H:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$   
 $x=0$

$-\frac{1}{x}$  H:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$   
 $x=0$

Por tanto, la gráfica de la función a trozos es:



• Cálculo la derivada primera para estudiar la monotonicidad:

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Decrece:  $(-\infty, 0)$   
 Crece:  $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$

1	+	+	+
$\frac{1}{x^2}$	+	+	+
1	-	-	-
$\frac{1}{x^2}$	-	-	-

b) pendiente de la recta tangente  $m = -1 \Rightarrow$  ¿Hallar a para que  $f'(a) = -1$ ?

Por tanto, como quiero que la derivada sea negativa  $\Rightarrow$  solo tiene sentido que la respuesta esté en  $(-\infty, 0) \Rightarrow$  por tanto uso  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$

luego el punto es  $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

c) Cálculo la derivada segunda:

$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2	+	+	+
$\frac{2}{x^3}$	+	+	+
-2	-	-	-
$\frac{-2}{x^3}$	-	-	-

$\Rightarrow$

$f''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$-\frac{2}{x^3}$
----------	-----------------	------------------

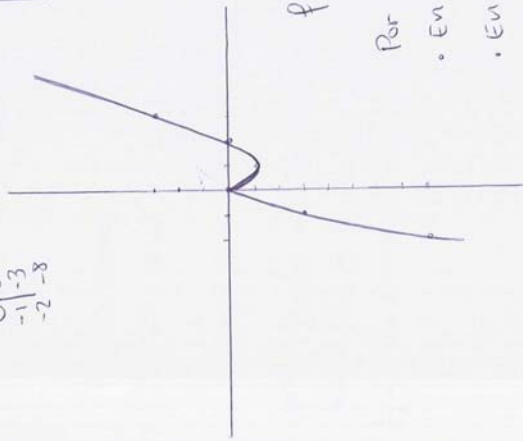
Concava:  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \leq 0 \\ x^2 - 2x & x > 0 \end{cases}$

• Ambas funciones cuadráticas son parábolas.

$y = -x^2 + 2x$   
 Vértice:  
 $x = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = 1$   
 $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$   
 $V = (1, -1)$

$y = x^2 - 2x$   
 Vértice:  
 $x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$   
 $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$   
 $V = (1, -1)$



En este caso los extremos relativos son:  
 - los puntos que cumplen  $f'(x)$   
 - los puntos para los que no existe  $f'(x)$

$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x < 0 \\ 2x - 2 & x > 0 \end{cases}$

Por tanto:

- En  $(0, 0)$  hay un máximo relativo
- En  $(1, -1)$  hay un mínimo relativo



**4) f(x):**

• Pbs de corte con los ejes:

ejes:  $y=0$   $x=0$

$6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 2) = 0$   $x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow (0,0), (\frac{2}{3}, 0)$

• ejes:  $x=0$   $\Rightarrow (0,0)$

$y = -4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$

• Vértice:

$f'(x) = -4 + 12x$

$-4 + 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$f(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

$V = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

• Curvatura:

$f''(x) = 12 > 0 \Rightarrow$  Cóncava  $\cdot \mathbb{R}$

b)  $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = -4x + 6x^2 - (2x - x^2) = 7x^2 - 6x$

$\Rightarrow h'(x) = 14x - 6$

$14x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

$-\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7}$

$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

• Estudiamos antes la continuidad:

$9 - x^2$  es continua en  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=3$

$-2x^2 + 16x - 30$  es continua en  $\mathbb{R}$

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 9 - x^2 &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} -2x^2 + 16x - 30 &= -18 + 48 - 30 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x=3$

•  $f(3) = 9 - 3^2 = 0$

•  $f(3) = 9 - 3^2 = 0$

**g(x):**

• Pbs de corte con los ejes:

ejes:  $y=0$   $x=0$

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0$   $x=2$

$\Rightarrow (0,0), (2,0)$

• ejes:  $x=0$

$y = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

• Vértice:

$f'(x) = 2 - 2x$

$2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V = (1, 1)$

$f(1) = 2 - 1 = 1$

• Curvatura:

$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$  Cóncava  $\cdot \mathbb{R}$

$h'(x) = 14$

$h''(\frac{3}{7}) = 14 > 0 \Rightarrow$  Máximo para  $x = \frac{3}{7}$

• Estudiamos la monotonía:

$f'(x) = \begin{cases} -18x & \text{si } x < 3 \\ -4x + 16 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$-18x = 0$   $x = 0$

$-4x + 16 = 0$   $x = 4$

Crec:  $(-\infty, 0) \cup (3, 4)$

Decre:  $(0, 3) \cup (4, +\infty)$

$f''(x) = \begin{cases} -18 & \text{si } x < 3 \\ -4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow$  Máximo:  $(0, f(0)) = (0, 9)$

$f''(4) = -4 < 0 \Rightarrow$  Máximo:  $(4, f(4)) = (4, 2)$

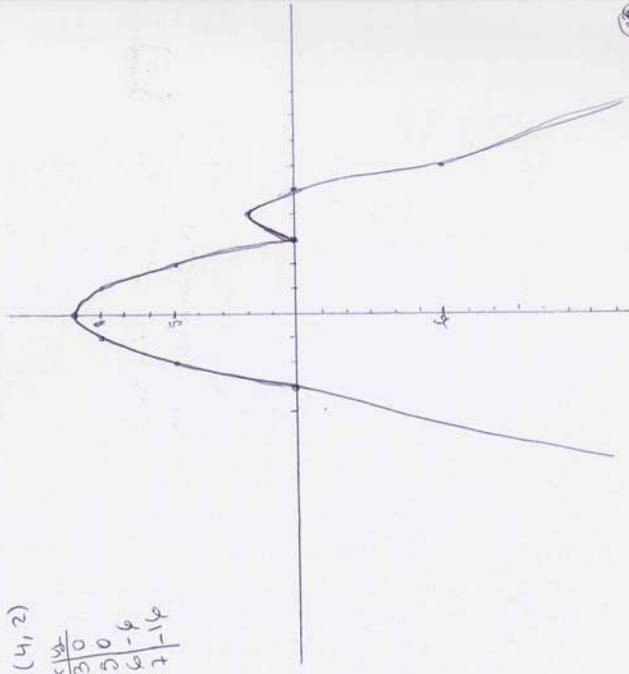
• En  $x=3$  la función es continua, no es derivable y pasa de ser decreciente a creciente  $\Rightarrow$  En  $x=3$  hay un mínimo relativo:

Mínimo:  $(3, f(3)) = (3, 0)$

b)  $y = 9 - x^2$   $V = (0, 9)$

$y = -2x^2 + 16x - 30$   $V = (4, 2)$

$x \setminus y$	0	5	6	7
0	9	9	6	1
5	9	9	6	1
6	9	9	6	1
7	9	9	6	1



16

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

a) Estudio de continuidad

$x^2 - 1$  es cont. en  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

Estudio de monotonía:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$2x = 0 \\ x = 0$$

Crec:  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

Decre:  $(-\infty, 0)$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

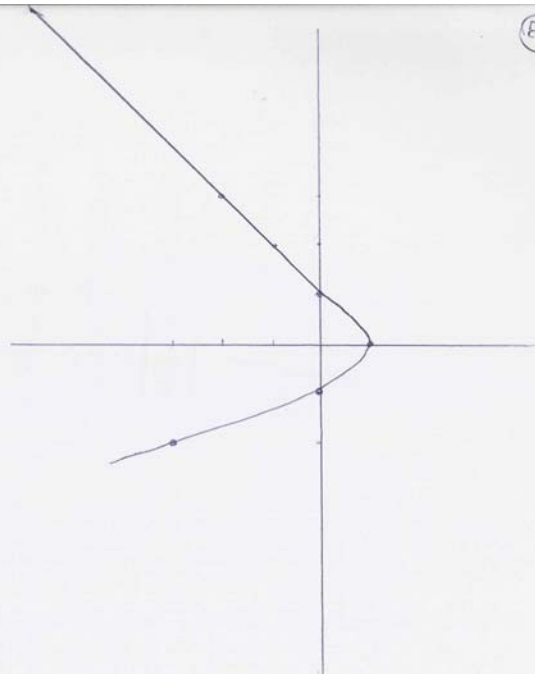
$$f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (0, f(0)) = (0, -1)$$

b)  $y = x^2 - 1$   
 $V = (0, -1)$

$$y = x - 1$$

$$\begin{array}{r} x \mid y \\ 1 \mid 0 \\ 2 \mid 1 \\ \hline 3 \mid 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \mid y \\ 1 \mid 0 \\ -1 \mid 0 \\ -2 \mid 3 \\ \hline \end{array}$$



27

17

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a)  $2^x$  es continua en  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$$

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$\Rightarrow f$  es continua en  $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2^1 \ln 2 = 2 \ln 2$$

$$f'(1^+) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

$\Rightarrow f$  NO es derivable en  $x = 1$

b) Asintotas:

$$H: y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} = 0$$

V: No hay

$$H: m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x} = 0 \Rightarrow \text{No hay}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x} = 0 \Rightarrow \text{No hay}$$

c) Ecuación:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = f(2) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$f'(2) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

28



18) 
$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a)  $2x - \frac{x^2}{2}$  es cont en  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=4$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - \frac{x^2}{2} = 8 - 8 = 0$$
  

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 8 = 0$$
  

$$f(4) = 2 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases} \Rightarrow f$$
 es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=4$

b)  $2 - x = 0$   
 $x = 2$

\* Ocea:  $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

\* Deriva:  $(2, 4)$

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

\* Como en  $x=4$ , la función es continua, no es derivable y pasa de ser decreciente a creciente  $\Rightarrow$  hay un mínimo relativo.

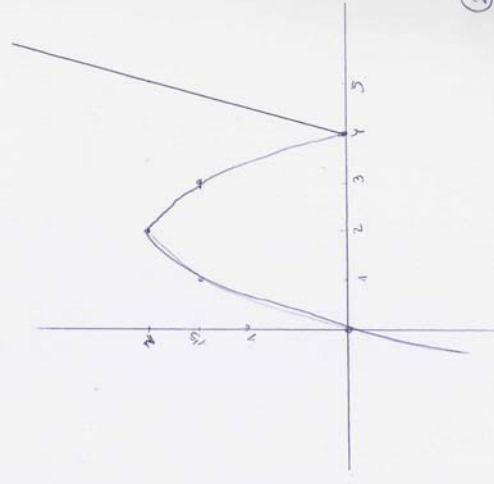
mínimo:  $(4, f(4)) = (4, 0)$

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Concavo:  $(-\infty, 4)$   
Convexo:  $(4, +\infty)$

$$y = 2x - \frac{x^2}{2}$$
  
$$V = (2, 2)$$

$$\begin{array}{r} x \mid y \\ 3 \mid 3/2 \\ 1 \mid 3/2 \\ 0 \mid 0 \end{array}$$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a)  $x^2$  es cont en  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$
  

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 4x - 2 = -1 + 4 - 2 = 1$$
  

$$g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
  

$$g$$
 es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=1$

$$g'(1^-) = 2$$
  

$$g'(1^+) = -2$$
  

$$g$$
 NO es derivable en  $x=1$ .

b)  $2x = 0$   
 $x = 0$

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

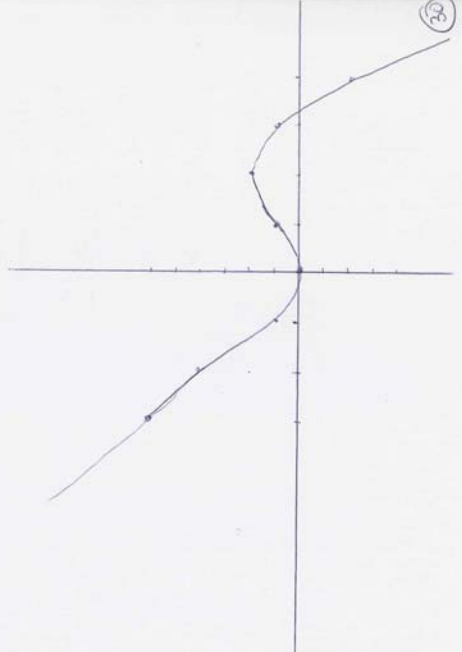
$$g''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo: } (0, 0)$$
  

$$g''(2) = -2 < 0 \Rightarrow \text{máximo: } (2, 2)$$

Convexo:  $(-\infty, 1)$   
Concavo:  $(1, +\infty)$

c)  $y = x^2$   
 $V = (0, 0)$

$$\begin{array}{r} x \mid y \\ 1 \mid 1 \\ 3 \mid 1 \\ 4 \mid -2 \end{array}$$



19

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 4 & -1 < x < 1 \\ \frac{x+2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{x} \quad -x^2+4 \quad \frac{x+2}{x}$$

o)  $\frac{x+2}{x}$  es cont en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   $\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = -1, 1$

\*  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x} = \frac{-1-2}{-1} = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} -x^2+4 = -(-1)^2+4 = 3$   $\Rightarrow f$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = -1$   
 $f(-1) = \text{no está def}$

\*  $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2+4 = -1^2+4 = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$   $\Rightarrow f$  es continua en  $x = 1$   
 $f(1) = \frac{1+2}{1} = 3$

o)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & x < -1 \\ -2x & -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$   $\Rightarrow f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = -1, -1$

\*  $x = -1 \Rightarrow$  No es derivable ya que no es continua

\*  $x = 1$ :

$$f'(1^-) = -2 \quad f'(1^+) = -2 \quad \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1$$

o) Asintotas:

$$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x} = 1 \quad \Rightarrow y = 1$$

$$V: \text{No hay}$$

$$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x} = 1 \quad \Rightarrow \text{No hay}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x} = -2 \quad \Rightarrow \text{No hay}$$

o) Extremos relativos

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & x < -1 \\ -2x & -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^3} & x < -1 \\ -2 & -1 < x < 1 \\ \frac{4}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \max: (0, f(0)) = (0, 4)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < 2 \\ \frac{x}{4} & x \geq 2 \end{cases}$$

$(x+1)^2$  es cont en  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow f$  es cont en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = 0, 2$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$f(0) = (0+1)^2 = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$   $\Rightarrow f$  es continua en  $x = 2$

$$o) f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x < 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & x > 2 \end{cases}$$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$   $\Rightarrow f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = 0, 2$

\*  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$   $\Rightarrow f$  es derivable en  $x = 2$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$   $\Rightarrow f$  es derivable en  $x = 0$



\*) Asintotas:

Hf:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$   $\Rightarrow$  No hay

Vf:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^2 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$   $\Rightarrow$   $\boxed{x=0}$  (por la derecha)

ob: No hay

\*) Extremos relativos:

$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & x > 2 \end{cases}$

$2x+2=0$   
 $x=-1$

$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2/x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

Como en  $x=2$ , la función es continua, no es derivable y la función pasa de ser decreciente a creciente  $\Rightarrow$  hay un extremo relativo:

$\boxed{\min: (2, f(2)) = (2, \frac{1}{2})}$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 1/x & 1 < x \leq 2 \\ x - \frac{1}{2} & x > 2 \end{cases}$

$x^2$  es cont en  $\mathbb{R}$   
 $\frac{1}{x}$  " " "  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   $\Rightarrow$  la función es continua en  $\mathbb{R}$  salvo que en  $x=1, 2$

Hf:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \frac{1}{2}) = +\infty$

\*)  $\boxed{x=1}$

$\Rightarrow f$  es continua en  $x=1$



$f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\min: (-1, f(-1)) = (-1, 0)}$

\*)  $\boxed{x=2}$

Hf:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$   
 $f(2) = \frac{1}{2}$

Vf:  $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & x > 2 \end{cases}$

Hf:  $f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^3} & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

\*)  $\boxed{x=2}$

Hf:  $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x < 2 \\ \frac{1}{2} & x > 2 \end{cases}$

\*) Asintotas:

Hf:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$   $\Rightarrow$  No hay

Vf: No hay

ob: No hay

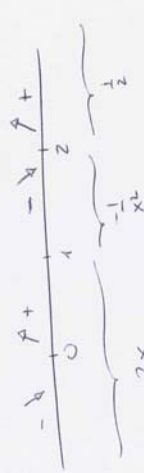
\*) Extremos relativos:

$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & x > 2 \end{cases}$

$2x=0$   
 $x=0$

$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 2/x^3 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\min: (0, f(0)) = (0, 0)}$







b)  $3x-3$  cont. en  $\mathbb{R}$   
 $x^2-6x+11$  cont. en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=2$

lim  $3x-3 = 3$   
 $x \rightarrow 2^-$   
 lim  $x^2-6x+11 = 3$   
 $x \rightarrow 2^+$   
 $f(2) = 3 \cdot 2 - 3 = 3$   
 $\Rightarrow f$  es continua en  $x=2$

$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ 2x-6 & x > 2 \end{cases}$   
 $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=2$   
 $f'(2^-) = 3$   
 $f'(2^+) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$   
 $\Rightarrow$  No es derivable en  $x=2$

c) Extremos:

$2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow$  Pto:  $(3, f(3)) = (3, 2)$

c) Como en  $x=2$  la función es continua, no es derivable y pasa de ser creciente a decreciente  $\Rightarrow$  hay un máximo relativo:

Pto:  $(2, f(2)) = (2, 3)$

c)  $\exists \alpha \in \mathbb{R} / f'(\alpha) = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow$  Pto:  $(3, f(3)) = (3, 2)$

a)  $x^2+2x-3$  cont. en  $\mathbb{R}$   
 $4x-4$  cont. en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=1$

lim  $x^2+2x-3 = 0$   
 $x \rightarrow 1^-$   
 lim  $4x-4 = 0$   
 $x \rightarrow 1^+$   
 $f(1) = 1^2+2 \cdot 1 - 3 = 0$   
 $\Rightarrow g$  es continua en  $x=1$

$g(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$   
 $g$  es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=1$   
 $g'(1^-) = 2$   
 $g'(1^+) = 0$   
 $\Rightarrow$  No es derivable en  $x=1$

c) Extremos:

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

$g'(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

$g''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow$  Pto:  $(-1, f(-1)) = (-1, -4)$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $g'(\alpha) = 0$ ?

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

Pto:  $(-1, f(-1)) = (-1, -4)$

$f(t) = \begin{cases} -t^3+5t^2 & 0 \leq t < 3 \\ -t^2+12t-9 & 3 \leq t \leq 5 \\ 2t+16 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$

a)  $* t=3$   
 lim  $-t^3+5t^2 = -27+45 = 18$   
 $t \rightarrow 3^-$   
 lim  $-t^2+12t-9 = -9+36-9 = 18$   
 $t \rightarrow 3^+$   
 $f(3) = 18$   
 $\Rightarrow f$  es continua en  $t=3$

$f'(t) = \begin{cases} -3t^2+10t & 0 < t < 3 \\ -2t+12 & 3 < t < 5 \\ 2 & 5 < t < 10 \end{cases}$

$* t=5$   
 $f'(5^-) = -3 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = -27 + 30 = 3$   
 $f'(5^+) = -2 \cdot 3 + 12 = -6 + 12 = 6$   
 $\Rightarrow$  No es derivable en  $t=5$

b)  $f''(t) = \begin{cases} -6t+10 & 0 < t < 3 \\ -2 & 3 < t < 5 \\ 0 & 5 < t < 10 \end{cases}$

$-6t+10=0$   
 $t = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow P.T. (1\frac{2}{3}, f(1\frac{2}{3})) = (1\frac{2}{3}, 9\frac{1}{2})$

$f(\frac{5}{3}) = -(\frac{5}{3})^3 + 5(\frac{5}{3})^2 = -\frac{125}{27} + \frac{125}{9} = 9\frac{1}{2}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & x \leq 4 \\ x^2+9x+21 & x > 4 \end{cases}$

$\frac{1}{x-3}$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$   
 $x^2+9x+21$  es cont. en  $\mathbb{R}$   
 $\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=3, 4$

lim  $-t^3+5t^2 = -125+125 = 0$   
 $t \rightarrow 5^-$   
 lim  $-t^2+12t-9 = -25+60-9 = 26$   
 $t \rightarrow 5^+$   
 $f(5) = 26$   
 $\Rightarrow f$  es continua en  $t=5$

$* t=5$

$f'(5^-) = -25+12 = -13$   
 $f'(5^+) = 2$   
 $\Rightarrow$  Es derivable en  $t=5$

$f''(t) = \begin{cases} -6t+10 & 0 < t < 3 \\ -2 & 3 < t < 5 \\ 0 & 5 < t < 10 \end{cases}$

\*  $|x=3|$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$   
 $\Rightarrow f$  tiene discontinuidad de salto infinito en  $x=3$   
 $f(3)$  no existe

\*  $|x=4|$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-3} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-3} = 1$   
 $\Rightarrow f$  es continua en  $x=4$   
 $f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$

a)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$   
 $x < 4$   
 $x > 4$   
 $\Rightarrow f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x=3, 4$

\*  $|x=4|$

$f'(4^-) = \frac{-1}{(4-3)^3} = -1$   
 $f'(4^+) = \frac{-1}{(4-3)^3} = -1$   
 $\Rightarrow f$  es derivable en  $x=4$

b)  $y = \frac{1}{x-3}$

Problema de continuidad:

1) Asintotas:

H.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty \Rightarrow y=0$

V.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

$2x-9=0$

$x=4,5$

$f(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$

$x < 4$

$x > 4$

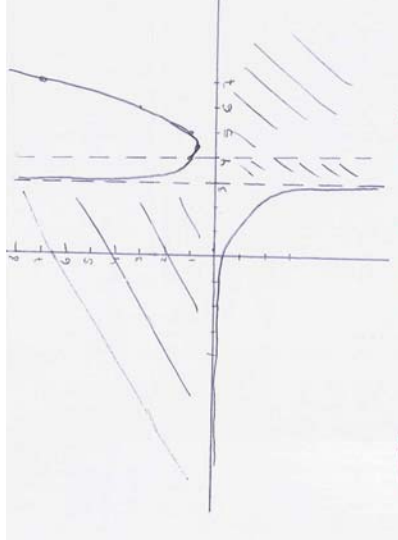
$2x-9=0$

$x=4,5$

Gracia:  $(4,5, +\infty)$

Deriva:  $(-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 4,5)$

$f'(4,5) = 2,70 \Rightarrow$  mínimo:  $(4,5, f(4,5)) = (4,5, 0,75)$



$f(x) = \begin{cases} -4x-3 & x < -1 \\ 2x^2-1 & -1 < x < 1 \\ \frac{x+2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

a)  $-4x-3$  cont en  $\mathbb{R}$   
 $2x^2-1$  cont en  $\mathbb{R}$   
 $\frac{x+2}{x}$  cont en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

\*  $|x=-1|$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} -4x-3 = -4(-1)-3 = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^2-1 = 2(-1)^2-1 = 1$

$f(-1) = -4(-1)-3 = 1$

$\Rightarrow f$  es continua en  $x=-1$

$f(x) = \begin{cases} -4x-3 & x < -1 \\ 2x^2-1 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

\*  $|x=1|$

$f'(1^-) = -4$

$f'(1^+) = 4(-1) = -4$

$y = 2x^2-1$

$x = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow D = \{0, 1\}$

$f(0) = -1$

$\frac{x+2}{x} = \frac{-1+2}{-1} = -1$

1) Región acotada:

$x^2-9x+21=0$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-84}}{2}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

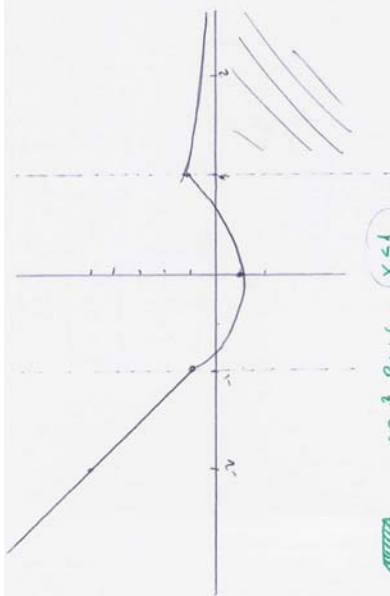
$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{9 \pm i\sqrt{3}}{2}$





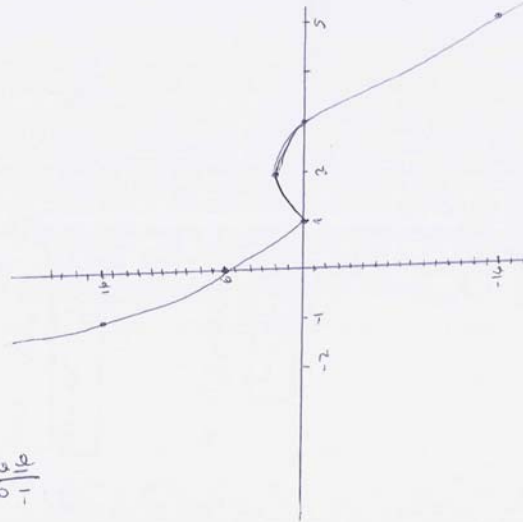
14  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & x > 1 \end{cases}$

a)  $y = 2x^2 - 8x + 6$   
 $x = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = 2$   
 $f(2) = -2$

$V = (2, -2) \Rightarrow$  esta fora do range

$y = -2x^2 + 8x - 6$   
 $x = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = 2$   
 $f(2) = 2$

$x \mid y$   
 $\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & -16 \end{array}$



A la vista de la gráfica se ve que la función es continua en  $\mathbb{R}$  pero no es derivable en  $x=1$ . Por tanto:  
 - en  $(2, 2)$  hay un máximo relativo  
 - en  $(1, 0)$  " " mínimo relativo

15  $f(x) = \frac{3}{x}$ ;  $x_0 = -1$

Ecuación de la recta tangente:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = -1$   
 $y_0 = f(x_0) = f(-1) = \frac{3}{-1} = -3$   
 $f'(x) = -\frac{3}{x^2} \Rightarrow f'(-1) = -3$   
 $y - (-3) = -3(x - (-1))$   
 $y + 3 = -3(x + 1)$   
 $y = -3x - 3 - 3$   
 $y = -3x - 6$

16  $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ ,  $x_0 = 1$

$x_0 = 1$   
 $y_0 = f(1) = \frac{3-2}{1+1} = \frac{1}{2}$   
 $f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$   
 $y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x - 1)$   
 $y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$   
 $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$

17  $f(x) = \frac{2x^2+5}{x}$ ,  $x_0 = 1$

$x_0 = 1$   
 $y_0 = f(1) = \frac{2+5}{1} = 7$   
 $f'(x) = \frac{4x^2 - (2x^2+5)}{x^2} = \frac{2x^2-5}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2-5}{1} = -3$   
 $y - 7 = -3(x - 1)$   
 $y = -3x + 3 + 7$   
 $y = -3x + 10$

18  $g(x) = \frac{4x-y}{x+4}$ ,  $x_0 = 0$

$x_0 = 0$   
 $y_0 = g(0) = \frac{4 \cdot 0 - y}{0+4} = -1$   
 $g'(x) = \frac{4(x+4) - (4x-y)}{(x+4)^2} = \frac{20}{(x+4)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$   
 $y - (-1) = \frac{5}{4}(x - 0)$   
 $y = \frac{5}{4}x - 1$

19  $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$ ,  $x_0 = 1$

$x_0 = 1$   
 $y_0 = f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$   
 $f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2-1} = 2$   
 $y - 1 = 2(x - 1)$   
 $y = 2x - 2 + 1$   
 $y = 2x - 1$

20)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $x_0 = 2$

$x_0 = 2$   
 $y_0 = f(2) = \frac{1}{2-1} = 1$   
 $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$   
 $y - 1 = -(x-2)$   
 $y = -x + 2 + 1$   
 $y = -x + 3$

21)  $f(x) = x^3 + 3x^2$ ,  $x_0 = -1$

$x_0 = -1$   
 $y_0 = f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = 2$   
 $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = 3 - 6 = -3$   
 $y - 2 = -3(x + 1)$   
 $y = -3x - 3 + 2$   
 $y = -3x - 1$

22)  $f(x) = \frac{4x+1}{2x-2}$ ,  $x_0 = 0$

$x_0 = 0$   
 $y_0 = f(0) = \frac{4 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$   
 $f'(x) = \frac{4(2x-2) - 2(4x+1)}{(2x-2)^2} = \frac{-6}{(2x-2)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$   
 $y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}(x - 0)$   
 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

23)  $f(x) = x \cdot \ln x$ ,  $x_0 = 1$

$x_0 = 1$   
 $y_0 = f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$   
 $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$   
 $y - 0 = 1(x - 1)$   
 $y = x - 1$

24)  $f(x) = x^3 + x^2$ ,  $x_0 = -2$

$x_0 = -2$   
 $y_0 = f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 = -8 + 4 = -4$   
 $f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) = 12 - 4 = 8$   
 $y + 4 = 8(x + 2)$   
 $y = 8x + 16 - 4$   
 $y = 8x + 12$

25)  $f(x) = -x^2 + 3x$ ,  $m = 0$

$m = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$   
 $f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x + 3 = 0$   
 $x^2 = \frac{3}{2} = 1.5$   
 $x = \pm 1.5$   
 $x_0 = 1$   
 $y_0 = f(1) = -1 + 3 = 2$   
 $f'(1) = 0$   
 $x_0 = -1$   
 $y_0 = f(-1) = -1 - 3 = -4$   
 $f'(-1) = 0$   
 Puntos de tangencia: (1, 2) and (-1, -4)

26)  $f(x) = x^3 - 4x + 2$ ,  $x_0 = \text{pto de inflexión}$

Calculo P.I.:  
 $f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $x_0 = 0$   
 $y_0 = f(0) = 2$   
 $f'(0) = -4$   
 $y - 2 = -4(x - 0)$   
 $y = -4x + 2$

27)  $g(x) = \frac{2}{x} + \ln x$ ,  $x_0 = 1$

$x_0 = 1$   
 $y_0 = \frac{2}{1} + \ln 1 = 2 + 0 = 2$   
 $g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(1) = -\frac{2}{1^2} + \frac{1}{1} = -2 + 1 = -1$   
 $y - 2 = -1(x - 1)$   
 $y = -x + 1 + 2$   
 $y = -x + 3$

28)  $g(x) = \frac{x}{x-2}$ ,  $x_0 = 3$

$x_0 = 3$   
 $y_0 = g(3) = \frac{3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$   
 $g'(x) = \frac{x(x-2) - (x-2)^2}{(x-2)^3} = \frac{-2}{(x-2)^3} \Rightarrow g'(3) = \frac{-2}{(3-2)^3} = -2$   
 $y - 3 = -2(x - 3)$   
 $y = -2x + 6 + 3$   
 $y = -2x + 9$

29)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ , recta tangente paralela a  $y = 3x - 5$

$f'(x) = 4x + 3 = 3 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $f(0) = 1$   
 Ponto es (0, 1)

30)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ , recta tangente paralela a  $y = -3x + 3$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = -3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$   
 $x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$  or  $x = 2$   
 $f(0) = 4$   
 $f(2) = \frac{1}{3}8 - 4 - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 6 = \frac{8-18}{3} = -\frac{10}{3}$   
 Puntos: (0, 4) and (2, -10/3)



31)  $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ , extremo relativo (1,2)

extremo (1,2)  $\Rightarrow$   $\begin{cases} * \text{Passa por } (1,2) \Rightarrow g(1) = 2 \\ * f'(1) = 0 \end{cases}$

$$* g(1) = a + \frac{b}{1} = a + b = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 2$$

$$* g'(x) = a - \frac{b}{x^2} \Rightarrow g'(1) = a - b = 0 \Rightarrow \frac{a-b}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a-b}{2} = 0$$

32)  $f(x) = x^2 + ax^2 + bx$ , extremo relativo em  $x=2$ , P.I em  $x=3$

\* extremo em  $x=2 \Rightarrow f'(2) = 0$

\* P.I em  $x=3 \Rightarrow f''(3) = 0$

$$f'(x) = 2x + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \Rightarrow 12 + 4a + b = 0 \Rightarrow 18 + 2a = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = -9 \Rightarrow a = -18$$

$$f''(x) = 2 + 2a \Rightarrow f''(3) = 2 + 2a = 0 \Rightarrow 12 - 36 + b = 0 \Rightarrow b = 24$$

33) Para tanto:  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 2, 4$$

1)  $f'(x) = 6x - 18$

$$f''(x) = 6 \Rightarrow f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

34)  $g(x) = x^2 + ax^2 + b$ , P.I = (2,5)

\* Passa por (2,5)  $\Rightarrow g(2) = 5$

\*  $g''(2) = 0$

$$g(x) = x^2 + ax^2 + b = 8 + 4a + b = 5 \Rightarrow 4a + b = -3 \Rightarrow -24 + b = -3 \Rightarrow b = 21$$

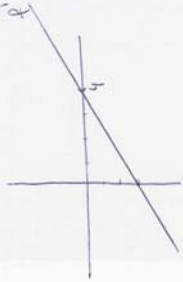
\*  $g'(x) = 2x + 2a$

$$g'(2) = 4 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

35) recta: (0,3) e (4,0)

$$f' = \frac{-b}{a} + \frac{p}{4}$$

recta: (4, +∞)  
Deriva: (-∞, 4)



36)  $f(x) = 3x^2 - 6x + a$  é mínimo?

$$f'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo no abscissa em } x=1$$

b) valor mínimo de  $f(1) = 5$

$$3 - 6 + a = 5 \Rightarrow a = 8$$

37)  $f(x) = x^2 + ax + b$ , passa por (0,-5), recta tge // a  $y = -4x$

\* passa por (0,-5)  $\Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow 0^2 + a \cdot 0 + b = -5 \Rightarrow b = -5$

\* recta tge em (0,-5)  $\Rightarrow f'(0) = -4 \Rightarrow 2 \cdot 0 + a = -4 \Rightarrow a = -4$

recta // a  $y = -4x \Rightarrow f'(x) = 2x + a$

38) recta que passa por (2,0) e (3,1)



39)  $f(x) = a(x-1)^2 + b$ , passa por (1,2), extremo  $x=2$

\* passa por (1,2)  $\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a(1-1)^2 + b = 2 \Rightarrow b = 2$

\* extremo em  $x=2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2a(2-1) + b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$

\*  $f(x) = a(x-1)^2 + b$

40)  $f(x) = ax^2 + bx$ , extremo em (1,4)

\* passa por (1,4)  $\Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow a - 2a = 4$

\* extremo (1,4)  $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$

\*  $f(x) = ax^2 + bx$

41)  $f(x) = \frac{a}{x} + b$ , extremo em (1,3)

\*  $f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow 2b + b = 3 \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1$

\* extremo (1,3)  $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow -a + 2b = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

**[41]**  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , extremo (0,0), PI (2,-16)

extremo (0,0)  $\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

PI (2,-16)  $\Rightarrow \begin{cases} f(2) = -16 \Rightarrow 8a + 4b = -16 \\ f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b = -16 \\ -24a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b = -16 \\ -16a = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$   
 $f''(x) = 6ax + 2b$

**[42]**  $f(x) = 2x^2 + ax^2 - 12x + b$ , fse em  $x=1$ , PI em  $x = \frac{1}{2}$

fse em  $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2 + a - 12 + b = 0 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$

PI em  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12 \Rightarrow f''(x) = 12x + 2a$

**[43]**  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ , extremo (-2,3)

extremo (-2,3)  $\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 3 \Rightarrow -8 + 4a + b = 3 \Rightarrow b = 3 + 8 - 4a = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \\ f'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$

**[44]**  $g(x) = 2x^2 - 8x + a$ , valor mínimo de  $g$  em 3

$g'(x) = 4x - 8 \rightarrow g''(x) = 4$

$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

$g''(2) = 4 > 0 \Rightarrow$  mínimo em  $x=2$

valor mínimo  $\Rightarrow g(2) = 3$

$\Rightarrow 8 - 16 + a = 3 \Rightarrow a = 3 - 8 + 16 = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \end{cases}$

**[45]**  $f': y = -2x + 4$

$\begin{matrix} x & y \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}$

$\begin{matrix} + & - \\ 1 & 2 \end{matrix}$

Desce: (-2, 2)

Sube: (2, 2)

**[46]**  $f(x) = ax^2 - bx + 4$ , extremo (1,10)

extremo (1,10)  $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 10 \Rightarrow a - b + 4 = 10 \Rightarrow a - b = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -6 \end{cases} \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \end{cases} \end{cases}$

$f'(x) = 2ax - b$

**[47]**  $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$

a)  $v = \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = 3(\frac{3}{2})^2 - 9 \cdot \frac{3}{2} + 6 = -\frac{3}{4}$

$v = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$

$\begin{matrix} x & y \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{matrix}$

$\begin{matrix} + & - \\ 1 & 2 \end{matrix}$

Desce: (-2, 1)  $\cup$  (2, + $\infty$ )

Sube: (1, 2)

b) recta tangente em (0,1)

$x_0 = 0 \Rightarrow y - 1 = 6(x - 0)$

$y_0 = 1 \Rightarrow y = 6x + 1$

$f'(x) = f'(0) = 6$

**[48]**  $f(x) = ax^2 + bx + 5$ , máximo em (2,1)

máximo (2,1)  $\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + 5 = 1 \Rightarrow 4a - 8a = -4 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \end{cases}$

$f(x) = 2ax + b$

**[49]**  $f(x) = ax^2 + 3x^2 - 5x + b$ , pte por (1,3) y tangente PI em  $x = -1$

pte por (1,-3)  $\Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow 1 + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \end{cases}$

PI em  $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

$f(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f'(x) = 6ax + 6$

**[50]**  $V = (0,2)$ , corte (-3,0), (3,0)

$\begin{matrix} + & - \\ 1 & 2 \end{matrix}$

Desce: (-3, 3)

Sube: (3, 3)

**[51]**  $f(x) = ax^2 - b$ , recta tangente a (1,5) en  $y = 3x + 2$

$f'(1) = 5 \Rightarrow a - b = 5$

$f'(1) = 3 \Rightarrow 2a - b = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

$f'(x) = 2ax$



152)  $f(x) = ax^2 + bx$ , pasa por  $(1, 1)$ , pendiente recta f' en  $x = -3$  es  $-3$  en  $x = 1$

$\Rightarrow f'(1) = -3$

1)  $f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$   
 $\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -a - b = -1 \\ 3a + b = -3 \\ \hline 2a = -4 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a = -2}$   
 $f(x) = 3ax^2 + b$   
 $\Rightarrow -2 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

153)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$  f es continua y mínimo en  $x = -1$

1) f es continua  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3}$

$f(1) = \ln 1 = 0$   
 2) mínimo en  $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$   
 $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -2 + a = 0 \\ \boxed{a = 2} \end{matrix}$

154)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$

a)  $f(2) = 7$  y f es continua en  $x = 1$   
 \*  $f(2) = 7 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 7 \Rightarrow 2a + b = 7$   
 $\begin{matrix} 2a + b = 7 \\ -a - b = -5 \\ \hline a = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ \boxed{b = 3} \end{matrix}$   
 \*  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 4 = 1 + 4 = 5$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = a + b \Rightarrow a + b = 5$   
 $\Rightarrow \begin{matrix} a + b = 5 \\ \boxed{b = 3} \end{matrix}$

155)  $B(x) = -3x^2 + 120x + 675$  en  $x \geq 0$

a) la empresa no obtiene beneficio cuando  $B(x)$  sea negativo.

$-3x^2 + 120x + 675 = 0$   
 $x = \frac{-120 \pm \sqrt{14400 + 8100}}{-6} = \frac{-120 \pm 150}{-6}$   
 $\frac{30}{-6} = -5$   
 $\frac{-270}{-6} = 45$

Como el dominio de definición es  $x \geq 0$   $\rightarrow$  Apartir de los 45.000 € la empresa no obtiene beneficio.

b)  $B'(x) = -6x + 120 \Rightarrow B''(x) = -6$   
 $-6x + 120 = 0 \Rightarrow x = 20$   
 $B''(20) = -6 < 0 \rightarrow$  máximo  $\Rightarrow$

$B(20) = -3 \cdot 20^2 + 120 \cdot 20 + 675 = 1875 \text{ €}$

$\Rightarrow$  Se obtiene el máximo beneficio al gastar 20.000 € en publicidad siendo este beneficio de 1.875 €

c) Grea:  $(0, 20)$

Devece:  $(20, 700)$

d) vértice:

$x = \frac{-120}{2 \cdot (-3)} = 20 \Rightarrow V = (20, 1875)$

$\begin{matrix} x & y \\ 0 & 675 \\ 10 & 1575 \\ 20 & 1875 \\ 40 & 675 \end{matrix}$

